**Кукса П.П.**

**Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана**

**E-mail: kouxa@online.ru**
**WWW: http://www.geocities.com/pkouxa**

# НЕЧЕТКИЕ ЛИНГВИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВТОРОГО РОДА

В настоящее время методы теории нечетких множеств (НМ), алгоритмов и систем находят широкое применение, как в промышленных, так и в непромышленных областях. Наблюдается тенденция построения моделей реальных объектов, систем, процессов с привлечением человека-эксперта как источника информации, при этом знания, полученные от эксперта, носят качественный и нечеткий характер. Неопределенность данных и ситуаций является неотъемлемым свойством реальности, учет воздействий которой на моделируемый объект необходим для построения адекватных моделей. Основу нечеткой системы (НС) составляет набор правил – ее лингвистическое описание, содержащее слова и выражения на естественном языке, смысл которых должен быть формализован сопоставлением НМ. На этом этапе необходимо учитывать лингвистическую неопределенность и неопределенность заключений.

Входные данные характеризуются нечеткостью и неопределенностью из-за неточности и зашумленности поступающей информации. Кроме того, экспериментальные данные (неточные и зашумленные) наблюдений могут использоваться при настройке параметров НС (для проведения параметрической идентификации нечеткой модели). Указанные неопределенности трансформируются в *неопределенность* функций принадлежности (ФП) НМ (рис. 1), от которых зависит эффективность всей НС. Поэтому особый интерес представляют методы и средства обработки *неопределенных (нечетких) ФП*, которые позволят *моделировать* неопределенности и *минимизировать* их воздействие на систему. В традиционных НС при назначении вещественных числовых значений элементам полного множества приходиться иметь дело с неопределенностью в силу указанных выше причин. То есть такая оценка назначается примерно: она может отклоняться в ту или иную сторону. Это приводит к тому, что элементу полного множества назначается интервал, в пределах которого может меняться его оценка. Интервалы изменений оценок формируют в плоскости, образованной координатными осями Ox и Oμ, *область неопределенности*, которая играет ключевую роль: определение ее границ составляет основу построения нечетких моделей второго рода.

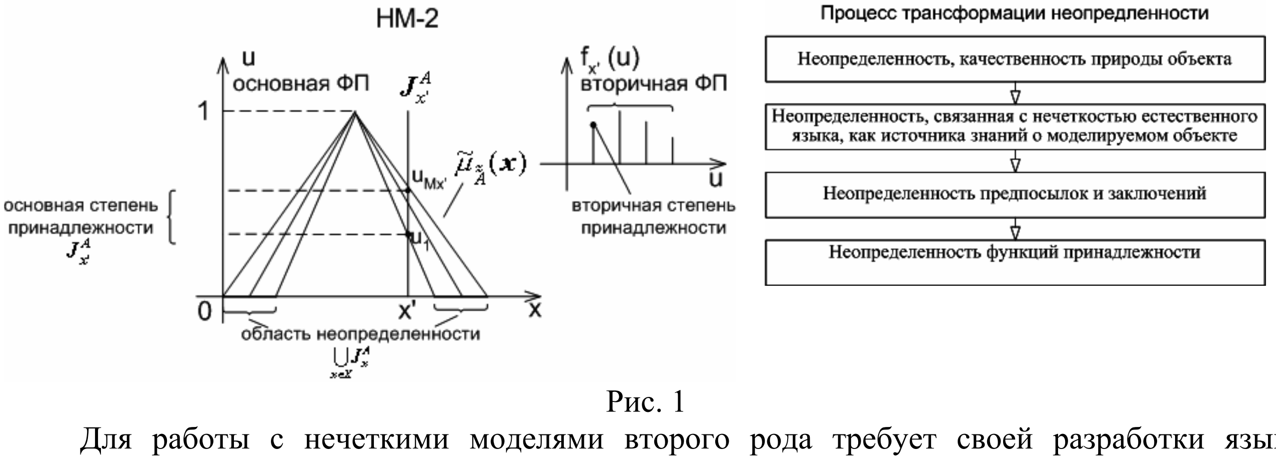



Рис. 1

Для работы с нечеткими моделями второго рода требует своей разработки язык (алгебра) нечетких множеств второго рода (НМ-2): должны быть разработаны базовые (теоретико-множественные, алгебраические, специальные) операции, алгоритмы вывода (композиционное правило вывода), обобщены процедуры дефазификации, проведен анализ свойств этих операций, исследованы алгебраические структуры НМ-2.

Можно предложить несколько способов выполнения операций над НМ-2:

1. Сведение операций над НМ-2 к операциям над нечеткими множествами первого типа (НМ-1);
2. Использование принципа обобщения /1/;
3. Использование обобщенного метода расширения.

В первом случае для выполнения операций над НМ-2 сначала одним из методов (выбора максимума, выбора центра площади) каждое НМ-2 преобразуется в некоторое НМ-1: $D = \{(d_i, x_i) \mid i = \overline{1,N}\}$. После выполнения операции осуществляется процедура преобразования результирующего НМ-1 в НМ-2, заменяющая для каждого $x \in X$ ($X=\{x_i\}_N$ – некоторое множество элементов, N-число элементов в X) степень принадлежности $\mu_A(x)$ множествами $L_i(u), i = \overline{1,N}$ с функциями принадлежности $\mu_{Li}(x)$, которые задаются субъективно.

Во втором случае правило выполнения операции над НМ-2 выводиться из соответствующей операции для НМ-1 с использованием принципа обобщения, расширяющего определения операций над НМ-1 на НМ-2.

Указанные способы дают разные результаты при выполнении одних и тех же операций, так как имеют эвристический характер.

Рассмотрим выполнение операции пересечения НМ-2. Представим НМ-2 $\tilde{\tilde{A}}$ и $\tilde{\tilde{B}}$ объединением их вторичных ФП:

$$\tilde{\tilde{A}} = \{(\tilde{\mu}_{\tilde{\tilde{A}}}(x), x) \mid \forall x \in X\} = \int_{x \in X} \tilde{\mu}_{\tilde{\tilde{A}}}(x)/x, \text{ где } \tilde{\mu}_{\tilde{\tilde{A}}}(x) = \int_{u \in J_x^A} f_x(u)/u,\ J_x^A \subseteq [0,1]$$

$$\tilde{\tilde{B}} = \{(\tilde{\mu}_{\tilde{\tilde{B}}}(x), x) \mid \forall x \in X\} = \int_{x \in X} \tilde{\mu}_{\tilde{\tilde{B}}}(x)/x, \text{ где } \tilde{\mu}_{\tilde{\tilde{B}}}(x) = \int_{w \in J_X^B} g_x(w)/w,\ J_x^B \subseteq [0,1] \quad (1)$$

где $J_x^A\ (J_x^B)$ - множество значений основной ФП $\tilde{\tilde{A}}\,(\tilde{\tilde{B}})$, $\tilde{\mu}_{\tilde{\tilde{A}}}(x)\ (\tilde{\mu}_{\tilde{\tilde{B}}}(x))$ - вторичная ФП, определенная на $J_x^A\ (J_x^B)$.

Тогда пересечение ($\bigcap$) НМ-2 $\tilde{\tilde{A}}$ и $\tilde{\tilde{B}}$ находится согласно (2)

$$\tilde{\tilde{A}} \bigcap \tilde{\tilde{B}} = \sum_{x \in X} \tilde{\mu}_{\tilde{\tilde{A}} \cap \tilde{\tilde{B}}}(x)/x = \sum_{x \in X} \tilde{\mu}_{\tilde{\tilde{A}}}(x) \Pi \tilde{\mu}_{\tilde{\tilde{A}}}(x)/x, \quad (2)$$

где $\Pi$-операция специального пересечения вторичных НМ-1, выполняемая для $\forall x \in X$.

Выполнение операции пересечения по первому способу на первом этапе потребует для каждого $x_i$ из X, $i = \overline{1,N}$ поиска среди $M_i^A$ и $M_i^B$ элементов множеств значений основной ФП НМ-2 $\tilde{\tilde{A}}$ и $\tilde{\tilde{B}}$ соответственно элемента со степенью принадлежности равной единице и выбору крайнего слева элемента, т.е. имеет место следующая последовательность действий:

Найти $u \in J_{x_i}^A : f_{x_i}(u) = 1;\ w \in J_{x_i}^B : g_{x_i}(w) = 1$

Определить $v_i = \min(u, w)$

На втором этапе ФП $\mu_{L_i}(v_i)$ можно аппроксимировать треугольником *(l,c,r)* с вершиной *c* в точке $v_i$, и крайними точками *l* и *r*, определяемыми исходя из следующих соотношений:

$$l = \min(\min J_{x_i}^A, \min J_x^B),\ r = \min(\max J_{x_i}^A, \max J_x^B) \quad (3)$$

Выполнение операции пересечения по второму способу осуществляется по следующему соотношению:

$$\tilde{\mu}_{\tilde{\tilde{A}}\cap\tilde{\tilde{B}}}(x) = \sum_{v\in J_x^v} h_x(v)/v = \varphi(\sum_{u\in J_x^u} f_x(u)/u, \sum_{w\in J_x^w} g_x(w)), \qquad (4)$$

где $\varphi:[0,1]\times[0,1]\to[0,1], \varphi(u,w)=v=\min(u,v)$ . Тогда в соответствии с принципом обобщения /1/:

$$h_x(v) = \sup_{(u,w)\in\varphi^{-1}(v)} \min(f_x(u), g_x(w)), \qquad (5)$$

где $\varphi^{-1}(v)=\{(u,w)\in[0,1]\times[0,1] \mid \varphi(u,w)=v\}$ . Выражение (5) представляет собой формальное определение операции $\bigcap$ над парой НМ-2.

Можно показать, что результат выполнения П содержит от $M_{\min}=\min(M_A,M_B)$ до $M_{\max}=M_A+M_B-1$ элементов, а границы результата лежат в пределах от наименьшего минимального элемента до наименьшего максимального элемента множеств $J_x^A$ и $J_x^B$. При равномерной дискретизации отрезка [0,1] результат содержит ровно $M_A$=$M_B$=$M$ элементов. Из (5) следует, что в общем случае (для произвольных множеств $J$) сложность операции $\bigcap$ определяется произведением $N\cdot M_A\cdot M_B$, где $M_A\cdot M_B$ - сложность операции П. В таком виде процедура нахождения пересечения характеризуется высокой емкостной и вычислительной сложностью, что особенно проявляется при пакетном выполнении операции $\bigcap$ сразу над несколькими НМ-2, поскольку сложность определяется мощностью прямого произведения множеств $J_x^1,\ldots,J_x^n$ .

При равномерном разбиении отрезка [0,1] для нормальных и выпуклых НМ-1 (значений НФП) получены следующие правила выполнения операции пересечения:

$$\begin{cases} f(u)\vee g(u), & l\le u\le v1 \\ f(u), & v1<u\le r\wedge v2 \\ f(u)\wedge g(u), & v2<u\le r \end{cases}, \qquad (6)$$

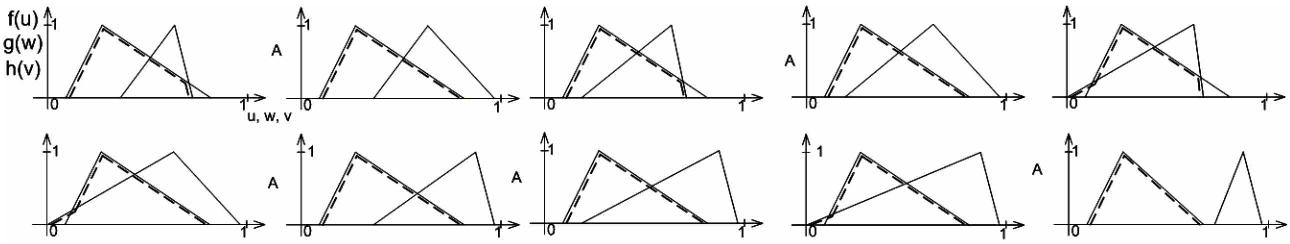
где $v1,v2: f(v1)=g(v2)=1(v1\le v2)$ , которые сводятся к выполнению $(r-l+1)\cdot M$ шагов, из которых в общем случае $(v1-l)\cdot M$ – операции взятия min, $(r-v2)\cdot M$ – операции взятия max и $(r-l+1)\cdot M$ - операции присвоения.

При неравномерном разбиении [0,1] задача нахождения пересечения П сводится к формированию прямого произведения множеств $J_x^A$ и $J_x^B$ , его упорядочиванию с исключением одинаковых элементов и присвоением оставшимся максимального в группе значения степени принадлежности. Получить эффективные формулы для вычисления П в данном случае не удается (на данный момент), поэтому наблюдается значительное превышение длины промежуточного массива, содержащего прямое произведение на длиной результата($M_{\max} << |J_x^A|\cdot|J_x^B|$) (снижение длины промежуточного массива возможно за счет того, что при упорядоченном формировании прямого произведения одинаковые $v_k=u_i\wedge w_j$ получаются группами, а из всей группы можно сохранять только один элемент, но это не освобождает от сортировки с исключением одинаковых элементов).

Проведем сравнение первых двух способов выполнения операций над НМ-2 на примере $\bigcap$. Сравнение осуществим для треугольных вторичных ФП. Пусть треугольная вторичная ФП задается тройкой чисел *(l,c,r)*. Выполнение операции пересечения П по первому способу сводится к вычислению $l'=\min(l1,l2), c'=\min(c1,c2), r'=\min(r1,r2)$ . При втором способе вычислений необходимо с шагом 1/$M$ определять значения ФП1 и ФП2

( $f(u)=\dfrac{u-l}{c-l}$ при $u \le c$ или $f(u)=\dfrac{r-u}{r-c}$ при $u > c$ ) и в соответствии с правилами (6) вычислять значение ФП’ результата: т.е. требуется $(r'-l'+1)\cdot M$ шагов в соответствии с (6). Первый способ при аппроксимации треугольными ФП в 50% случаев дает такой же результат, что и более трудоемкий второй способ (рис. 2).

Выполнение операций над НМ-2 по третьему способу основывается на аналогии между НМ-1 и НМ-2 и заключается в следующем. С одной стороны, НМ-2 можно представить в виде объединения НМ-2, содержащих ровно по одному элементу из каждого $J_{x_i}$ : $\tilde{\tilde{A}} = \sum_{j=1}^{n_A} A_e^j$ , где $A_e^j = \sum_{i=1}^{N} f_{x_i}(u_i^j)/u_i^j$ , $j=\overline{1,n_A}$, $n_A = \prod_{i=1}^{N} M_i$ .




А - аппроксимация

Рис. 2

С другой стороны НМ-1 можно представить в виде НМ-2: $\tilde{A} = \sum_{i=1}^{N} [1/u_i]/x_i$ . Результат выполнения операций над НМ-1 есть НМ-1, которое также можно рассматривать как НМ-2: $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \sum_{i=1}^{N} [1/u_i \wedge w_i]/x_i$ . Для НМ-1 выполняется равенство $f(u)=g(w)=h(v)\equiv 1$, которое для НМ-2 в общем случае не выполняется, что приводит к необходимости отслеживать значения $f(u), g(w)$ , т.е. введению операции $H(f(u),g(w))=h(v)$ . Аналогично НМ-1, пересечение НМ-2 $\tilde{\tilde{A}}_e^i$ и $\tilde{\tilde{B}}_e^j$ определяется как: $\tilde{\tilde{A}}_e^i \bigcap \tilde{\tilde{B}}_e^j = \sum_{k=1}^{N} [H(u_k^i, w_k^j)/u_k^i \wedge w_k^j]/x_k$ , $\tilde{\tilde{A}} \bigcap \tilde{\tilde{B}} = \sum_{i=1}^{n_A}\sum_{j=1}^{n_B}\ \sum_{k=1}^{N} [H(u_k^i, w_k^j)/u_k^i \wedge w_k^j]/x_k$ . Операция $H(\cdot,\cdot)$ может обладать различными свойствами, что позволяет получать различные интерпретации определений операций над НМ-2. Приведенное выражение представляет собой общий теоретический результат, из которого могут быть получены практические способы выполнения операций над НМ-2.

Выбор того или иного способа выполнения операций зависит от конкретного приложения, в рамках которого используются НМ-2. Результаты рассмотрения различных способов выполнения операций над НМ-2 сведены в табл. 1.

Таблица 1.

<table>
<tr><td rowspan="3">Вычислительная сложность/точность</td><td colspan="3">ФП</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Треугольные</td><td colspan="2">Произвольные</td></tr>
<tr><td>Равномерное разбиение</td><td>Произвольное разбиение</td></tr>
<tr><td>Способ 1</td><td>Минимальная (3 ср.)/средняя</td><td>Низкая(O(M))/невысокая</td><td>Низкая(O(M))/невысокая</td></tr>
<tr><td>Способ 2</td><td>Средняя (М ср.)/высокая</td><td>Низкая(O(M))/высокая</td><td>Высокая $(O([\prod_{i=1}^{n} M_i]^2))$ /высокая</td></tr>
</table>

Полученные результаты позволяют выполнить выбор способа (или комбинации способов) выполнения операций над НМ-2 для конкретной задачи.

Литература

1. L.A. Zadeh The Concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning //Inform. Sci., vol. 8, pp. 199-249, 1976.

2. M.Mizumoto, K.Tanaka Some properties of fuzzy sets of type-2//Inform. Control, vol. 31, pp. 312-340, 1976.