Кукса П.П.

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

E-mail: kouxa@online.ru
WWW: http://www.geocities.com/pkouxa

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ТОЧНОСТИ В НЕЧЕТКИХ СИСТЕМАХ

Широкое применение нечетких систем обусловлено, не только возможностью формально представить и обрабатывать нечеткие понятия и знания, но и их вычислительными свойствами: возможностью аппроксимировать любую нелинейную функцию с любой точностью, а также функциональным сходством нечетких систем и нейронных сетей. В приложениях управления это дает возможность создавать адаптивные системы с оптимальной функцией управления, которая может быть аппроксимирована выходной переменной нечеткого регулятора, а также системы, обладающие свойством обучения и адаптации.

Решение проблемы построения нечетких систем требуемой точности является важной и актуальной задачей. Можно выделить несколько методов и подходов к построению нечетких систем, используемых в задачах системного моделирования и управления:

1) Методы, основанные на обучении;

2) Конструктивные методы построения нечетких моделей требуемой точности.

На основе обработки исходных данных (пар данных вход-выход) формируется набор правил, описывающих функциональное отношение вход-выход - информационно-логическая модель системы S. Одна часть данных используется для настройки, другая – для проверки (тестирования) модели. Процесс формирования системы правил по имеющимся данным о системе S связан с обучением в соответствии с заданным критерием поведению S настолько близко, насколько возможно, т.е. основной целью построения является уменьшение общей ошибки модели в процессе итеративной настройки. Обучение может осуществляться на основе принципов самообучения или контролируемого обучения. Для определения структуры модели могут применяться методы самоорганизации с использованием внешних или внутренних критериев выбора модели из множества кандидатов или критериев адекватности, в качестве которых могут выступать:

1) критерий согласованности поведения (характеризует степень соответствия характера изменения расчетных и фактических выходных значений);
2) критерий минимума смещения (характеризует чувствительность модели к изменению исходных данных, используемых для ее получения);
3) критерии регулярности (характеризует среднюю ошибку аппроксимации на обучающих и тестовых данных).

Настройка модели может осуществляться как с использованием градиентных алгоритмов адаптации параметров, так и непосредственным применением нейросетевых алгоритмов при представлении нечеткой системы в виде многослойной сетевой структуры.

В качестве характеристики точности в большинстве случаев используется среднеквадратичная ошибка, но могут использоваться и другие метрики для определения степени близости модельной и фактической функций.

Набор данных системы S, в общем случае, неоднороден – данные набора имеют произвольное распределение в пространстве переменных, следствием чего является различная достоверность и точность модели в разных областях пространства. В связи с этим важную роль приобретают интерполяционные свойства моделей, за счет которых область функционирования нечеткой системы не ограничивается областями сосредоточения исходных данных, но распространяется и на другие области. Механизм интерполяции в нечеткой базе правил основан на взаимодействии группы правил: условие выполнения правила является нечетким, правила активизируются в различной степени, в процессе вывода происходит их взаимодействие. Характер интерполяции зависит от многих факторов: класса модели, свойств нечетких множеств и типа ФП, механизма нечеткого логического вывода.

Потенциальная возможность построения модели, адекватной системе S в смысле достаточно точного количественного описания, и сходимость алгоритма обучения обеспечиваются универсальными аппроксимирующими свойствами нечетких моделей. Универсальные аппроксимационные возможности нечетких систем играют ключевую роль при формировании нелинейных алгоритмов управления.

Под универсальными аппроксимационными способностями нечетких систем понимается возможность приближения функциональной зависимости f с любой наперед заданной точностью. Строгое доказательство универсальных аппроксимирующих свойств для различных классов нечетких систем приводится в целом ряде работ [1-6].

Полученные результаты [1-3] являются чисто теоретическими, т.к. не дают метода построения нечеткой модели требуемой точности. При доказательстве аппроксимирующих свойств нечетких систем, не принимается во внимание то, какое количество решающих правил необходимо для достижения той или иной точности. В большинстве случаев количество правил экспоненциально возрастает с уменьшением ошибки аппроксимации. Такой неограниченный рост приводит к существенному возрастанию вычислительной сложности модели, потере интерпретируемости, и в конечном итоге к практической нереализуемости. Доказательства теорем об аппроксимации для нечетких систем в [2,3,9] опираются на теоремы Вейерштрасса и Стоуна-Вейерштрасса об аппроксимации, что не дает конструктивного способа реализации нечеткой модели заданной точности.

Существуют различные точки зрения на то, что лежит в основе универсального характера аппроксимационных возможностей нечетких систем: в [9] - это способность аппроксимировать любую полиномиальную функцию (любая непрерывная функция может быть аппроксимирована полиномиальными функциями); в [7] – это количество решающих правил. В [8] показано, что можно получить сколь угодно точное приближение любой непрерывной функции многих переменных, используя операции сложения и умножения на число, суперпозицию функций, линейные функции, а также одну произвольную непрерывную нелинейную функцию одной переменной. Данный факт позволяет объяснить универсальность нечетких систем их *нелинейностью*.

Формализация решения аппроксимационных задач в рамках конструктивного подхода требует формулирования правил построения нечетких множеств, определения количественных критериев оценки необходимого числа лингвистических термов (нечетких множеств) для каждой переменной, количества нечетких множеств, которыми оценивается выход системы. Количественные критерии оценки указанных параметров должны основываться на требуемых характеристиках точности. Рассмотрим построение нечеткой модели SISO (система «один вход, один выход»), предполагая, что аппроксимация должна быть равномерной, и задана требуемая точность.

Входная переменная z [a,b] нормируется к симметричному интервалу [-1,1]: $x_1=a_1z$. Интервал [-1,1] разбивается на 2n отрезков, на которых задается 2n+1 нечеткое множество с координатами вершин j/n, где $j = 0, \pm 1, ..., \pm n$. Для каждого нечеткого множества вводится правило: Если x_1 есть $A_{1,p}$ TO U есть U_m (таких правил 2n+1). Значения выходной переменной u лежат в интервале [-*H*, *H*], на котором задано *s* нечетких множеств U_m. Индекс *m* формируется как *функция* f(p) от индекса (номера) нечеткого множества A_p в X. Диапазон изменения индекса *m* [-*M(f,n)*, *M(f,n)*], где $M(f,n) := \max\{|f(p)|, -n \le p \le n\}$ (это максимальное значение m определяет разрешающую способность на выходе). Для конкретной системы N правил используется набор из максимум *2n+1* значений *m* (для рассматриваемого одномерного случая). В качестве метода дефазификации можно воспользоваться стандартным методом центра тяжести:

$$u = F_n(x) = \frac{\sum_{h=1}^{P} w_h \cdot f(h)}{\sum_{h=1}^{P} w_h} \frac{H}{M(f,n)}, \tag{1}$$

где w_h .- степень истинности условия; $\frac{H}{M(f,n)} f(h) = y_h$.

В силу теоремы Вейерштрасса об аппроксимации любая непрерывная функция на ограниченном интервале [a,b] может быть аппроксимирована полиномами. Такая аппроксимация будет осуществляться с погрешностью ε_1 . Для того чтобы осуществить аппроксимацию непрерывной функции с заданной точностью ε , в [9] предлагается аппроксимировать не саму функцию, а аппроксимирующий ее полином, что позволяет предложить конструктивный метод для построения нечеткой модели требуемой точности. Это возможно, если выбрать функцию f(p) такую, чтобы выполнялось равенство:

$$\frac{H}{M(f,n)} f(p) = P(\frac{p}{n}), \tag{2}$$

где P(x) – аппроксимирующий полином. Это равенство связывает параметры нечеткой модели, зависящие от n (количество правил N=2n+1, количество и координаты нечетких множеств) с параметрами (коэффициентами) полинома. Выбор функции f(p) определяет структуру правил (взаимосвязь вход-выход). При x=p/n соответствующее правило с условием (x есть A_p) активизируется со степенью 100%. Выход системы определяется величиной $\frac{H}{M(f,p)} f(p)$. При выполнении равенства (2) выход нечеткой системы совпадает со значением полинома P(x) в точке p/n. Если *x* лежит между *p/n* и *(p+1)/n*, то выход нечеткой модели интерполируется между всеми активизированными правилами. При используемом способе построения нечетких множеств (строгом разбиении домена) количество одновременно активизируемых правил 2^p , где *p* – размерность входа. С ростом *n* значение *p/n* стремится к *x* ($\frac{p}{n} \to x$ при $n \to \infty$), и, соответственно, повышается точность аппроксимации, что еще раз подтверждает вывод, сделанный в [7], о количестве правил, как решающем факторе, обеспечивающем универсальные аппроксимационные способности нечетких систем (заметим, что в [5,7] к такому выводу приходят с совершенно других позиций).

Рассмотрим метод на примере аппроксимации функции sinc(z) на отрезке [-3,3] с точностью $\varepsilon < 0.2$. В качестве аппроксимирующего полинома возьмем первые три члена ряда Тейлора: G(x) = 1 – 1.5x^2 + 0.675 x^4 -0.1446 x^6 +0.01808 x^8 ….

Погрешность ε_1 аппроксимации при этом составит |-0.1446*1^6| = 0.1446. Тогда нечеткая система должна аппроксимировать полином с точностью ε_2 < 0.055. Для этого потребуется 2n+1 (n > n*) правил:

$$n^* = \frac{c_1^{\max}}{\varepsilon_2} \sum_{d1=1}^{4} (\beta_{d1} \cdot d1) = \frac{1}{0.05536}(1.5 \cdot 2 + 0.675 \cdot 4) = 102.96$$ (n=103). Функция $f(p)=1000n^4-1500n^2p^2+675p^4$. $H=10^{-3}(1000+1500+675)=4.175$. Количество лингвистических термов для входа x равно *2n+1*. Для выходной переменной количество нечетких множеств в силу симметрии функции равно *n+1*.

При решении аппроксимационных задач могут использоваться нечеткие модели двух типов, отличающихся видом нечетких правил. Правила могут иметь различную форму заключения: функциональную и лингвистическую. Двум указанным формам соответствуют аппроксимирующие нечеткие модели *TSK с кусочно-функциональной многомерной интерполяцией* и аппроксимирующие нечеткие модели *Мамдани*. Последние допускают естественную интерпретацию, но с повышением точности аппроксимации свойство интерпретируемости теряется вследствие роста числа правил и плотности нечетких множеств, т.е. точность и интерпретируемость, в общем случае, для стандартных нечетких моделей являются взаимоисключающими свойствами. Для лингвистических моделей *Мамдани* точность может быть в значительной степени повышена при сохранении интерпретируемости использованием двух заключений на одно правило. Форма заключения правил при этом примет следующий вид:

$$y \text{ is } \textit{между } B_1 \textit{ и } B_2, \qquad (3)$$

где B_1 и B_2 два различных взаимодействующих на этапе вывода заключений, имеющих, в общем случае, различный относительный вес. Выход y получается интерполяцией значений B_1 и B_2. При этом сохраняется наглядность нечеткой модели, простая форма структуры и простота модификации модели.

Рассмотрены подходы к построению нечетких моделей требуемой точности. Указаны пути повышения точности для лингвистических нечетких моделей *Мамдани*. Приводится способ построения нечетких моделей для заданной функциональной зависимости, обеспечивающий требуемую точность аппроксимации.

Литература

1. *J. L. Castro* Fuzzy logic controllers are universal approximators // IEEE Trans. on SMC 25, pp. 629-635, 1995.
2. *H. T. Nguyen, V. Kreinovich* On approximations of controls by fuzzy systems // Technical Report TR 92-93/302, LIFE Chair of Fuzzy Theory, Institute of Technology, Tokyo, 1992.
3. *L. X. Wang* Fuzzy systems are universal approximators // Proc. of the IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems. San Diego, 1992, pp. 1163-1169.
4. *B. Kosko* Fuzzy systems as universal approximators // Proc. of the IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems. San Diego, 1992, pp. 1153-1162.
5. *P. Bauer, E. P. Klement, A. Leikermoser, B. Moser* Approximation of real functions by rule bases // Proc. of. the 5th IFSA World Congress'93. Seoul, 1993, pp. 239-241.
6. *P. Bauer, E. P. Klement, A. Leikermoser, B. Moser* Modeling of control functions by fuzzy controllers // Theoretical Aspects of Fuzzy Control (H. Nguyen, M. Sugeno, R. Tong, R. R. Yager, eds.), Wiley, New York, pp. 91-116. 1995.
7. *Domonkos Tikk* Investigation of fuzzy rule interpolation techniques and the universal approximation property of fuzzy controllers // Ph.D. dissertation, Budapest, 1999.
8. *Горбань А.Н.* Обобщенная аппроксимационная теорема и вычислительные возможности нейронных сетей // Сибирский журнал вычислительной математики, 1998. Т.1, № 1.С.12-24.

9. *H. Ying* Sufficient Conditions on General Fuzzy Systems As Function Approximators // Automatica, Vol. 30, NO. 3. – 1994. – pp. 521-525.